Composition de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction. Les calculs numériques demandés seront exclusivement effectués à la main.

Dans tout le problème, on désignera par f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ensemble des réels) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et par F la fonction définie par $F(x) = x - f(x)$. On notera (u_n) la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (E) l'équation $f(x) = o$ qui s'écrit aussi $x = F(x)$; si r est une solution de (E), on notera $I(r)$ un intervalle ouvert contenant r. La suite (u_n) sera définie par la donnée de

$$\begin{cases} u_o \in \mathbb{R} \quad \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

Le but du problème est d'étudier la convergence de la suite (u_n) et de donner des méthodes d'amélioration de la convergence.

1ère partie : On suppose ici que f possède une dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que si $F'(r) \neq 1$, on peut trouver un intervalle $I_1(r)$ sur lequel r soit l'unique solution de (E)

2°) On suppose que $|F'(r)| < 1$

a) Montrer qu'on peut alors trouver un intervalle $I(r)$ tel que :

$$\begin{cases} I(r) \subset I_1(r) \\ \exists M \in]0, 1[\text{ tel que } \forall x \in I(r) \quad |F'(x)| \leq M \\ F\left(I(r)\right) \subset I(r) \end{cases}$$

b) Montrer que si $u_o \in I(r)$ alors u_n converge vers r lorsque n tend vers l'infini. Préciser le cas où $u_o = r$

c) Etudier les différences $F(u_n) - F(u_{n-1})$ et $F(u_n) - F(r)$ pour en déduire quelques propriétés de (u_n) lorsque F garde un signe constant sur $I(r)$

3°) On suppose $|F'(r)| > 1$ Montrer qu'il existe un intervalle $I(r)$ sur lequel $|F'(x)| > 1$ et que si la suite (u_n) n'est pas constante à partir d'un certain rang, alors u_n ne peut converger vers r.

2ème partie : On suppose ici que f possède une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et que $F'(r) \neq 0$. On désigne alors par φ une fonction réelle de variable réelle. On notera (E') l'équation $x = \varphi(x)$ et $I(r)$ un intervalle ouvert contenant r et sur lequel

$$\begin{cases} \varphi \text{ admet une dérivée seconde} \\ (E) \text{ et } (E') \text{ ont une seule et même solution } r \text{ telle que} \\ |\varphi'(r)| < 1 \quad \text{et} \quad |\varphi'(r)| < |F'(r)| \end{cases}$$

.../...

La suite (v_n) sera définie par la donnée de

$$\begin{cases} v_o \in \mathbb{R} & \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} & v_{n+1} = \varphi(v_n) \end{cases}$$

1°) On suppose $u_n \neq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; montrer qu'on peut choisir u_o et v_o de manière à ce que v_n converge vers r et que

$$\frac{v_n - r}{u_n - r} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty \ (\text{même si } u_n \longrightarrow r)$$

2°) On pose $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ dès que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'on peut appliquer à cette fonction φ les résultats du 1°). En un point $(x, f(x))$ du graphe de f, écrire l'équation de la tangente, puis calculer l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox.

3°) On se propose, dans cette question, de calculer un encadrement de $\sqrt[3]{10}$. Dans ce but on pose $f(x) = \frac{1}{100}(x^3 - 10)$ et on se place sur $I(r) =]a,b[$ avec $a = 1{,}99$ et $b = 3$

a) Donner un encadrement de $F'(x)$ sur $I(r)$ et en déduire qu'on peut appliquer 1°) et 2°) avec $u_o = v_o = 2$

b) Calculer u_1 , u_2 , v_1 et v_2 avec une précision de 5×10^{-6}

puis calculer u_3 et v_3 avec une précision de 5×10^{-8}

c) Donner un encadrement de r en utilisant l'intervalle $]a, v_2[$

d) Tracer dans un même repère orthonormé les graphes de F et de φ .

<u>3ème partie</u> : On suppose maintenant que f possède une dérivée 3ene continue sur $\mathbb{R}$ que $f'(r) \neq 0 \neq F'(r)$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ dès que $f'(x) \neq 0$

1°) Montrer qu'on peut trouver un intervalle $I_1(r)$ sur lequel g possède une dérivée seconde continue

2°) Montrer qu'on peut trouver un intervalle $I(r) \subset I_1(r)$ sur lequel la fonction ψ définie par $\left\{ \forall x \in I(r),\ \psi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \right\}$ possède une dérivée continue

3°) Calculer $\psi(r)$ et $\psi'(r)$. On suppose $f''(r) \neq 0$, quelle est alors la limite de $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ lorsque x tend vers r

4°) La suite (w_n) sera définie par la donnée de

$$\begin{cases} w_o \in \mathbb{R} \quad \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \psi(w_n) \end{cases}$$

Montrer qu'on peut choisir w_o pour que w_n converge vers r

5°) On envisage dans cette question d'améliorer l'encadrement de $\sqrt[3]{10}$. On reprend les notations du II 3°).

a) Déterminer la fonction ψ et construire son graphe dans le même repère orthonormé que F et φ

b) Montrer que si $w_o = 2$ w_n est convergente. Calculer w_1 et w_2 avec une précision de 5×10^{-6} puis w_3 avec une précision de 5×10^{-8}

c) En déduire le meilleur encadrement possible de $\sqrt[3]{10}$

<u>4ème partie</u> : On suppose encore que f a une dérivée 3ene continue sur $\mathbb{R}$ on rappelle qu'alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim \varepsilon(x) = 0$ Si $x \longrightarrow \lambda$ et

$$F(x) = F(\lambda) + (x-\lambda) F'(\lambda) + \frac{(x-\lambda)^2}{2} F''(\lambda) + \frac{(x-\lambda)^3}{3!} (F'''(\lambda) + \varepsilon(x))$$

Soit alors r une solution de (E) telle que $F'(r) = 1$

1°) On suppose $f''(r) = F''(r) \neq 0$

a) Montrer qu'on peut trouver un intervalle $I(r)$ sur lequel

$$\begin{cases} r \text{ soit l'unique solution de (E)} \\ F'(x) \geq 0 \\ F''(x) \text{ de signe constant} \end{cases}$$

b) On s'inspirera alors du I pour étudier la suite (u_n) : montrer par exemple que si $u_o \in I(r)$ avec $u_o < r$ et $F''(r) > 0$ alors u_n converge vers r

c) Citer (sans démonstration) un autre cas de convergence vers r et des cas de divergence (ou de non convergence vers r)

2°) On suppose maintenant $f''(r) = 0$ et $f'''(r) \neq 0$

a) Montrer qu'on peut trouver un intervalle $I(r)$ sur lequel

$$\begin{cases} r \text{ soit l'unique solution de (E)} \\ F'(x) \geq 0 \\ F'''(x) \text{ garde un signe constant} \end{cases}$$

b) On prend $u_o \in I(r)$ avec $u_o > r$ Montrer que si $F'''(r) < 0$, alors u_n converge vers r, et si $F'''(r) > 0$, u_n ne peut converger vers r

c) Que se passe-t-il si $u_o < r$?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail